Gebrochen-rationale Funktionen • Wdh. ganzrationale Funktionen
Übung

1. Was bedeutet der Ausdruck $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$?

2. Geben Sie ein möglichst einfaches Kriterium zur Überprüfung der Symmetrie von ganzrationalen Funktionen an.

3. Überprüfen Sie folgende Funktionen auf Symmetrie zum Koordinatensystem und begründen Sie Ihre Aussage.

   a) $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + x$
   b) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 3x^2 - 2$
   c) $f(x) = 3x^5 + x^3 - x + 1$

4. Geben Sie den Globalverlauf folgender Funktionsgraphen an.

   a) $f(x) = -4x^3 - 2x^2 + 3$
   b) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 1$
   c) $f(x) = 0{,}3x^5 + x^2 + 0{,}5x - 3$

5. Machen Sie möglichst konkrete Aussagen über die Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion vom Grad n.

6. Berechnen Sie die Nullstellen inklusive Vielfachheit folgender Funktionen und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt von Linearfaktoren dar.

   a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
   b) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 1$
   c) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 8x^2$
   d) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$
   e) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

Gebrochen-rationale Funktionen • Wdh. ganzrationale Funktionen
Lösung

1. $f(x)$ stellt eine ganzrationale Funktion n – ten Grades dar.
   Der höchste Exponent $n \in \mathbb{N}$ gibt den **Grad** der Funktion an.
   Die Faktoren a_n; a_{n-1}; … , a_2; a_1; a_0 nennt man **Koeffizienten.** Diese sind in der Regel reelle Zahlen.
   Die Zahl a_n wird **Leitkoeffizient** genannt.
   Beispiel: die Funktion mit dem Funktionsterm Gleichung $f(x) = \frac{1}{5}x^4 + 2x^3 - x^2 + 4$ ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 4 mit dem Leitkoeffizienten $a_4 = \frac{1}{5}$.

2. Grundsätzlich kann jeder beliebige Funktionsgraph durch die Überprüfung von $f(-x) = f(x)$ auf Achsensymmetrie zur y-Achse und mit $f(-x) = -f(x)$ auf Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung überprüft werden.
   Der Graph einer ganzrationalen Funktion im Speziellen ist genau dann **achsensymmetrisch**, wenn die Funktionsgleichung nur aus geraden Exponenten besteht, Beispiel $f(x) = 0{,}5\,x^4 - 2x^2 - 3$.
   Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann **punktsymmetrisch**, wenn die Funktionsgleichung nur aus ungeraden Exponenten besteht wie beispielsweise $f(x) = \frac{1}{6}x^5 - 2x^3 + 4x$. Eine Konstante dürfte in diesem Fall nicht vorkommen.

3.
   a) Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung, da alle Exponenten in x ungerade sind.
   b) Achsensymmetrie zur y-Achse, da alle Exponenten in x gerade sind.
   c) Keine Symmetrie, es kommen sowohl ungerade, als auch gerade Hochzahlen vor.

4. Der Verlauf einer ganzrationalen Funktion wird durch den Summanden mit der höchsten Potenz bestimmt, also durch $a_n x^n$. Der Ausdruck a_n wird deswegen auch **Leitkoeffizient** genannt.

   a) Grad 3 und negativer Leitkoeffizient $a_3 = -4$. Der Graph kommt von oben (II. Quadrant) und geht nach unten (IV. Quadrant).
   b) Der Graph kommt von oben und geht nach oben.
   c) Der Graph kommt von unten und geht nach oben.

5. Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Dabei wird die Vielfachheit er Nullstellen mit eingerechnet. Beispiele:
   $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x^2 - x$ besitzt bei $x_1 = 0$ eine einfache und bei $x_2 = 2$ eine doppelte Nullstelle.
   $g(x) = x^4 + 3$ hingegen besitzt keine Nullstelle.
   Ist außerdem der Grad n der Funktion ungerade, so hat sie mindestens eine Nullstelle, bei geradem Grad muss dies nicht unbedingt der Fall sein.

6.

a) Ausklammern von x liefert den Term $f(x) = x \cdot (x^2 - 6x + 9)$. Damit ist bei $x_1 = 0$ eine einfache Nullstelle. Der restliche Ausdruck kann mit Hilfe der 2. Binomischen Formel oder der Mitternachtsformel in $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.
Folglich ist $f(x) = x \cdot (x-3)^2$ mit den Nullstellen $x_1 = 0$ (einfach) und $x_2 = 3$ (doppelt).

b) Eine der Nullstellen muss durch Probieren gefunden werden, z.B. $x_1 = -2$. Nach Polynomdivision sind die Nullstellen des verbleibenden quadratischen Terms gefunden werden, hier $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)(x^2 + x - 2)$. Zusammengefasst erhält man $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)$; Nullstellen: $x_1 = -2$ (doppelt) und $x_2 = 1$ (einfach).

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2(x+4)(x-4)$; Nullstellen: $x_1 0$ (doppelt), $x_2 = -4$ (einfach) und $x_2 = 4$ (einfach).

d) $f(x) = (x-2)\left(x - \left(1 - \sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\right)$ mit drei einfachen Nullstellen jeweils bei $x_1 = 2, x_2 = 1 - \sqrt{3} \approx -0{,}73$ und $x_3 = 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}73$.

e) Durch Substitution $u \coloneqq x^2$ erhält man aus der Gleichung $f(x) = 0$ den Ausdruck $u^2 - 3u - 4 = 0$ mit den Lösungen $u_1 = -1$ und $u_2 = 4$. Rücksubstitution ergibt $x_1 = -2$ (einfach) und $x_2 = 2$ (einfach).
Weitere Lösungen gibt es nicht, da $x^2 = -1$ nicht lösbar ist für reelle Zahlen. Also: $f(x) = (x-2)(x+2)(x^2+1)$.